

## ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ ДЛЯ БАЛОК ( РПР № 4 )

Даны две стальные балки, нагруженные сосредоточенными силами  $P_1$ ,  $P_2$ , внешними моментами  $m_1$ ,  $m_2$  и равномерно распределенными давлениями  $q_1 = const$ ,  $q_2 = const$ . Требуется:

1 – построить эпюры (графики функций) изгибающих моментов  $M = M(x)$  и поперечных сил  $Q = Q(x)$ , определив наибольшие по модулю значения  $M_{max}$  и  $Q_{max}$ ;

2 – для одной из балок на двух опорах (рисунки 3.10 а, 3.10 б, 3.10 в) подобрать три поперечных сечения (рисунок 3.11) по наибольшим напряжениям  $\sigma_{max} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа} = 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$ ;

3 – оценить неэкономичность прямоугольного и круглого профилей, по сравнению с тонкостенным двутавром, с точки зрения материалоемкости.

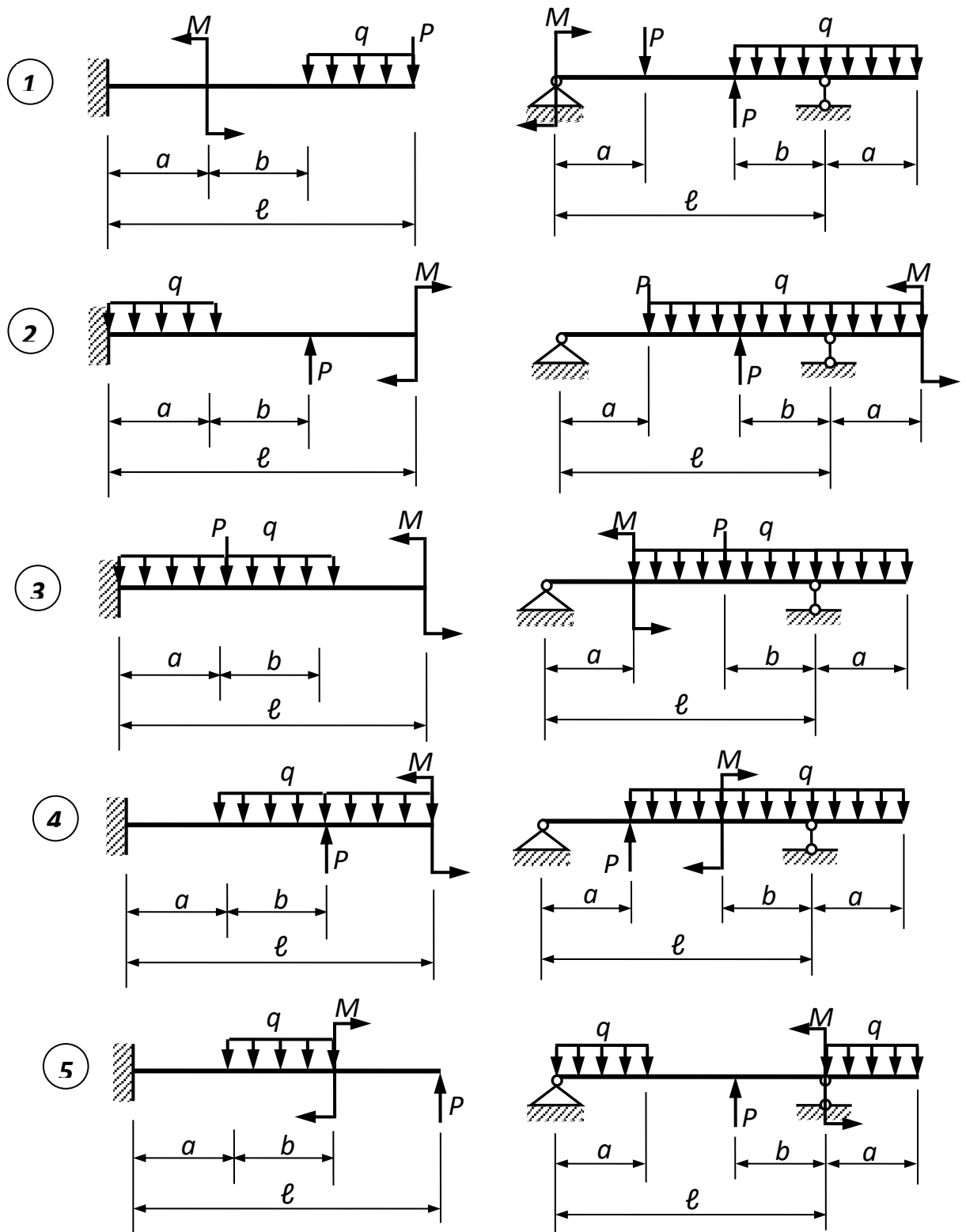
### Цель задания и варианты расчетных схем балок

Определить внутренние усилия для двух моделируемых конструкций и выполнить расчет одной балки на прочность. Исходные данные к решению задачи приведены в таблице 7, где буквенными символами «а», «б» и «ℓ» обозначены длины в метрах соответствующих участков бруса, схемы балок и формы проектируемых поперечных сечений представлены на рисунках 3.10, и 3.11.

Таблица 7 – Исходные данные для расчета балок

№ строки	Схема по рисунку 3.8	ℓ, м	а, м	б, м	Р, кН	М, кНм	q, кН/м
1	1	7,4	3,6	1,0	6	11	7
2	2	5,4	1,8	2,0	12	14	10
3	3	5,8	2,4	1,4	9	13	6
4	4	6,8	2,6	2,2	7	9	13
5	5	6,2	2,0	2,8	13	8	12
6	6	6,0	3,2	1,6	14	7	9
7	7	6,4	2,8	2,6	8	10	14
8	8	7,0	2,2	2,4	15	6	11
9	9	7,2	3,4	1,8	11	15	8
0	0	6,6	3,0	1,2	10	12	15
	<b>а</b>	<b>б</b>	<b>а</b>	<b>а</b>	<b>б</b>	<b>б</b>	<b>а</b>

Расчетную схему одной из двух представленных типов балок (с жестким защемлением или шарнирным опиранием) для подбора сечений, то есть расчета на прочность (рисунок 3.10) выбрать самостоятельно, по своему усмотрению и в соответствии с индивидуальным шифром варианта РПР.



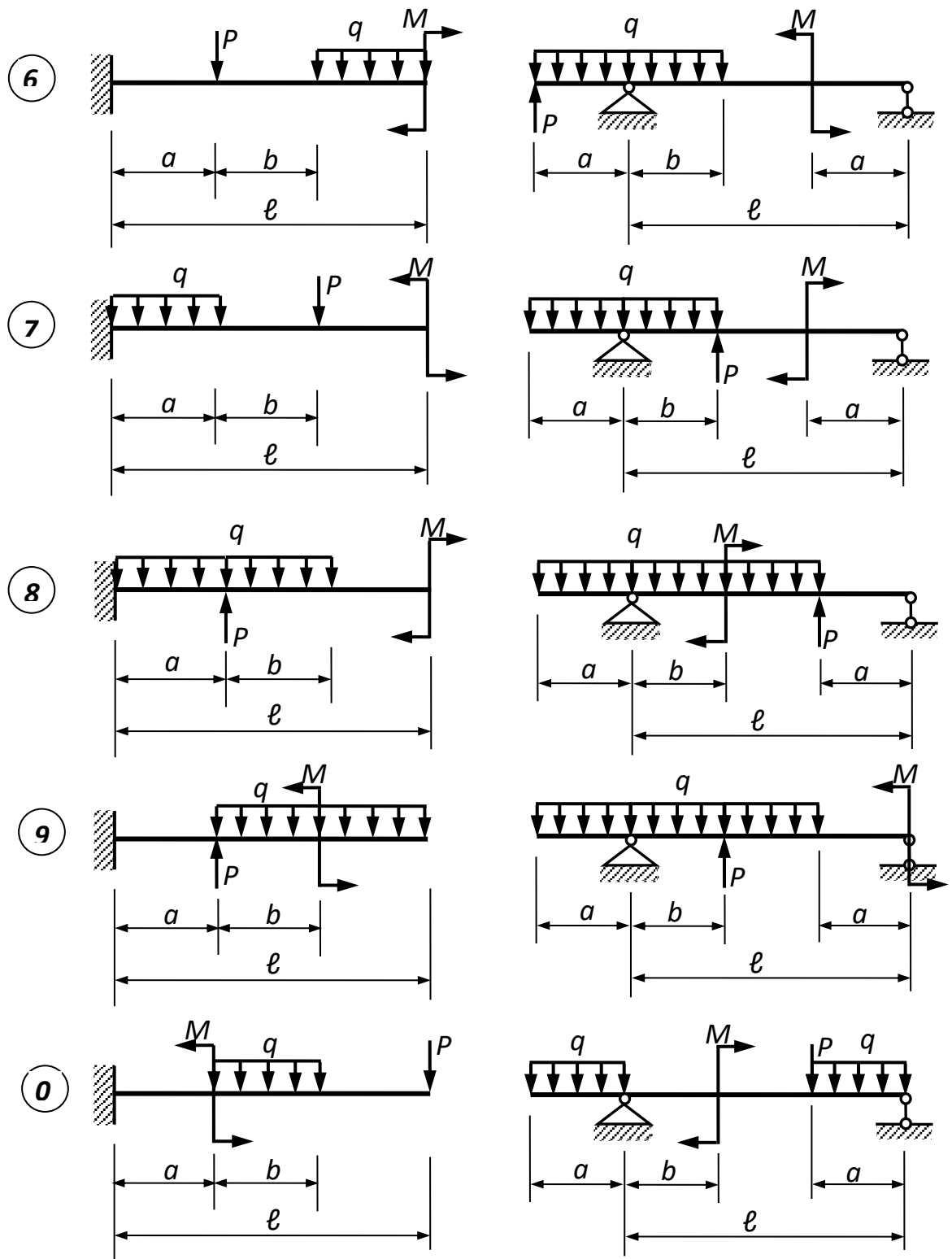


Рисунок 3.10

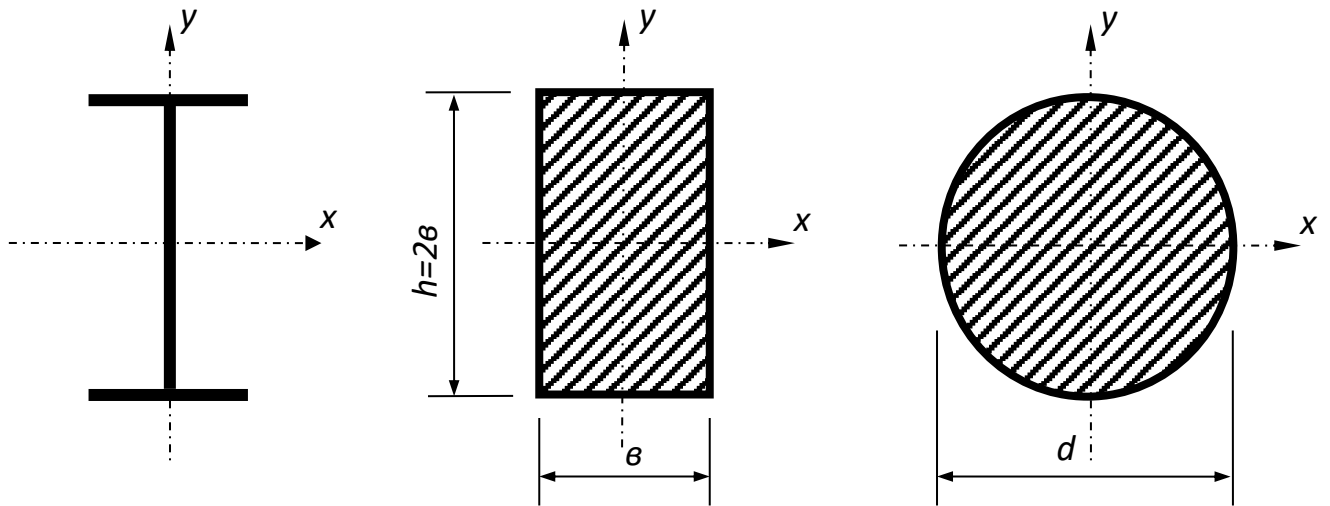


Рисунок 3.11

### Алгоритм и методика расчета

- 1) Определение реактивных усилий в опорах балки.
- 2) Проверка найденных опорных реакций путем их подстановки в соответствующее (дополнительное) уравнение равновесия.
- 3) Разбивка балки на участки и их нумерация слева – направо: 1, 2, ...4.
- 4) Составление аналитических выражений функций изгибающих моментов  $M_1 = M_1(x)$ ,  $M_2 = M_2(x)$  и поперечных сил  $Q_1 = Q_1(x)$ ,  $Q_2 = Q_2(x)$  для каждого участка балки.
- 5) Расчет и построение эпюр  $M$  и  $Q$  с определением наибольших абсолютных значений внутренних сил  $M_{max}$ ,  $Q_{max}$  и координат соответствующих сечений балки.
- 6) Графическая иллюстрация общего вида эпюры нормальных напряжений  $\sigma$  для опасного сечения балочной конструкции, где возникает  $M_{max}$ , с указанием знаков  $\sigma > 0$  и  $\sigma < 0$ . Выбрать соответствующий вариант эпюры  $\sigma$ , руководствуясь рисунком 3.12.

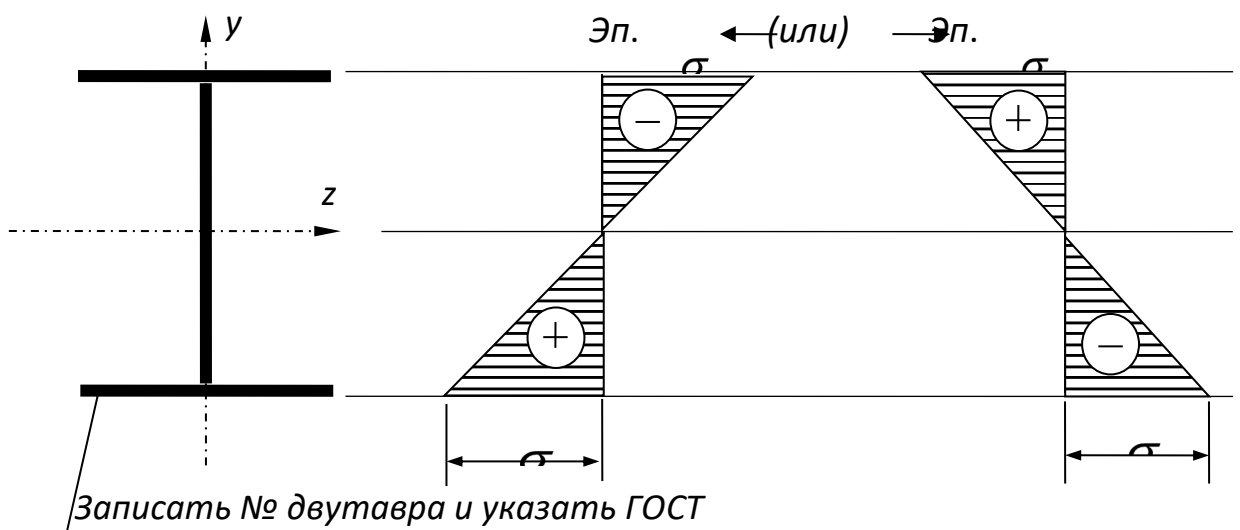


Рисунок 3.12

7) Вычисление минимально допустимого момента сопротивления  $[W_z]$ :

$$[W_z] = \frac{M_{max}}{[\sigma]}. \quad (3.19)$$

8) Определение размеров проектируемых сечений (рисунок 3.11) из условия прочности

$$W_z \geq [W_z]. \quad (3.20)$$

9) Оценка перегрузки ( $\delta_\sigma > 0$ ) или недогрузки балки ( $\delta_\sigma < 0$ ) по формуле

$$\delta_\sigma = \frac{[W_z] - W_z^{(\kappa)}}{W_z^{(\kappa)}} \cdot 100\%, \quad (3.21)$$

где  $W_z^{(\kappa)}$  - фактический момент сопротивления, который соответствует конструктивным геометрическим параметрам  $W_z, b_\kappa, h_\kappa=2b_\kappa, d_\kappa$  сечений (рисунок 3.11):

- $W_z^{(\kappa)} = W_z$  - по сортаменту;
- $W_z^{(\kappa)} = \frac{b_\kappa h_\kappa^2}{6}$  - прямоугольный профиль;
- $W_z^{(\kappa)} = \frac{\pi d_\kappa^3}{32}$  - круглое сечение.




10) Расчет коэффициента материалоемкости (экономичности) балки:

$$K_\sigma = \frac{F}{F_I}, \quad (3.22)$$

где  $F$  – площадь подобранных сечений прямоугольной и круглой формы;  
 $F_I$  - эталонная площадь прокатного двутавра.

11) Представление в табличной форме результатов проектного расчета балки на прочность (см. таблицу 8).

Таблица 8 – основные результаты расчета на прочность (образец оформления)

Эскиз сечения	$\delta_\sigma$ %	$F, F_I$ см <sup>2</sup>	$K_\sigma$
 № 22	-5,12	30,2	1,00
	-4,33	98	3,24
	1,48	132,7	4,39

### Указания.

Все расчеты выполняются с точностью до трех цифр после запятой.

### Пример выполнения расчетно-графической работы № 4

Для балки представленной на рисунке 3.13, необходимо построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента. Балка состоит из двух участков, в крайней левой точке ( $m.A$ ) приложен изгибающий момент ( $M = 8кНм$ ), второй из участков загружен равномерно-распределенной нагрузкой  $\left(q = 15 \frac{кН}{м}\right)$ , на границе первого и второго участка приложена сосредоточенная сила ( $P = 10кН$ ). Балка имеет две опоры: шарнирно-неподвижную ( $m. A$ ) и шарнирно-подвижную ( $m. B$ ).

1) Определение реакций опор.

Обозначим опоры буквами  $A$  и  $B$ , соответствующие три неизвестные найдем из уравнений равновесия (статики):

- сумма проекций всех сил на ось  $z$  балки должна быть равна нулю

$$\sum z = 0 \Rightarrow H_A = 0;$$

- сумма моментов всех сил относительно точки  $A$  должна быть равна нулю

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0, \\ -M - P_1 \cdot 2 - R_B \cdot 4 + q \cdot 2 \cdot 3 &= 0 \Rightarrow R_B = 15,5(кН); \end{aligned}$$

- сумма моментов всех сил относительно точки  $B$ , аналогично, приравнивается к нулю

$$\begin{aligned} \sum M_B &= 0, \\ -M + R_A \cdot 4 + P_1 \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 &= 0 \Rightarrow R_A = 4,5(кН). \end{aligned}$$

2) Проверим правильность найденных опорных реакций, подставив их в дополнительное уравнение равновесия (проекция сил на ось  $y$ )

$$\begin{aligned} \sum y &= 0 \\ R_A + P_1 - q \cdot 2 + R_B &= 0 \\ 4,5 + 10 - 15 \cdot 2 + 15,5 &= 0. \end{aligned}$$

Реакции найдены верно.

3) Построение эпюр.

Перед непосредственным построением эпюр, разобьем балку на два участка: 1-й – участок от точки приложения изгибающего момента до точки действия сосредоточенной силы  $P$  и 2-й – действие равномерно-распределенной нагрузки  $q$  со стороны  $m.B$  (2-й участок можно рассматривать и слева – направо).

Составим аналитические выражения функций и рассчитаем конкретные значения поперечных сил и изгибающих моментов.

- Определим поперечные силы для обоих участков:

Участок 1 ( $0 \leq z \leq 2$ ):

$$Q_1 = R_A = 4,5(\text{кН});$$

Участок 2 ( $0 \leq z \leq 2$ ):

$$Q_2 = -R_B + q \cdot z;$$

при  $z = 0$ ,  $Q_2 = -15,5(\text{кН})$ ,

при  $z = 2$ ,  $Q_2 = 14,5(\text{кН})$ .

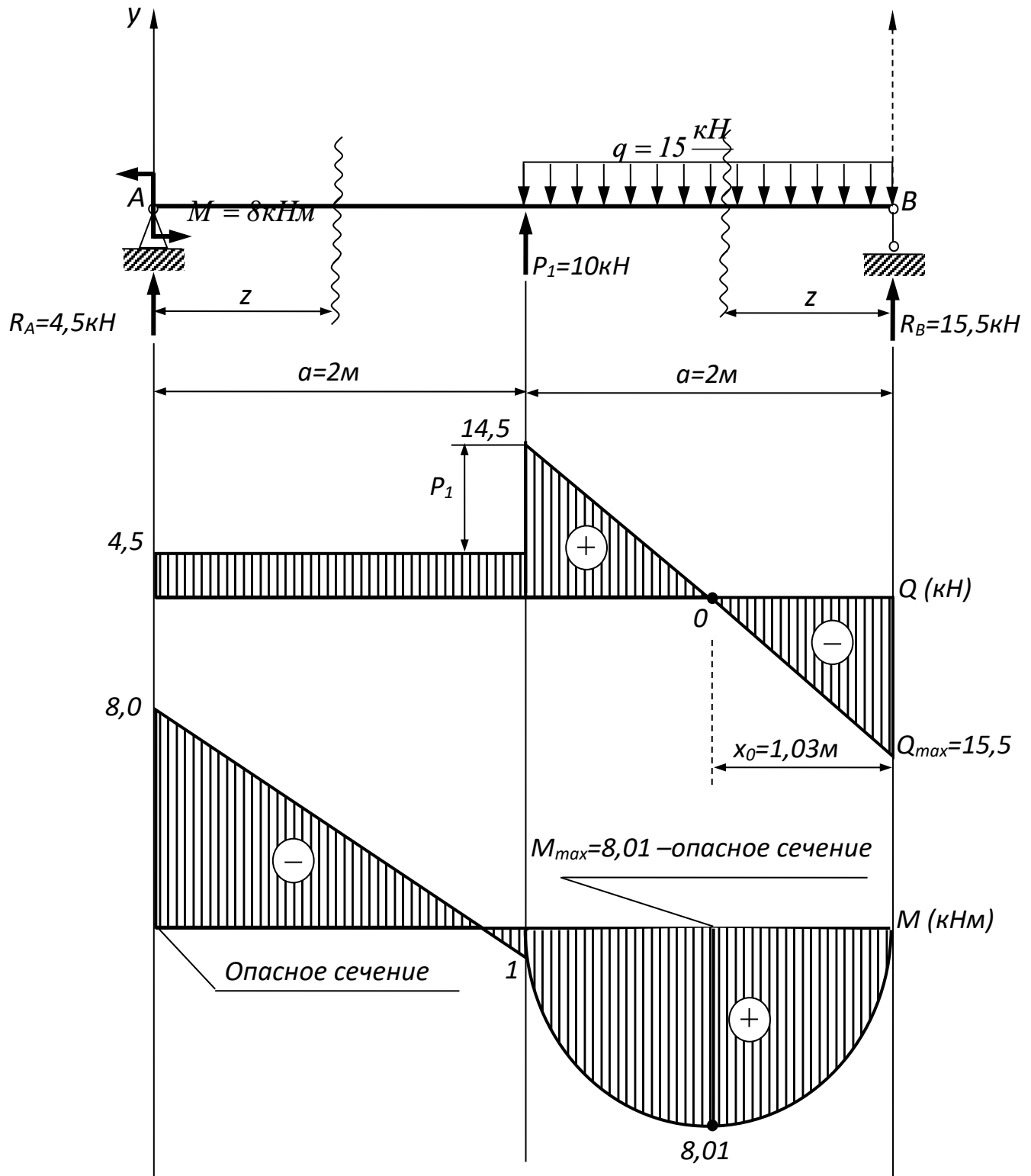


Рисунок 3.13

- Находим величины изгибающего момента.

Участок 1 ( $0 \leq z \leq 2$ )

$$M_1 = -M + R_A \cdot z;$$



при  $z = 0$ ,  $M_1 = -8(\text{кНм})$ ,

при  $z = 2$ ,  $M_1 = 1(\text{кНм})$ .

Участок 2 ( $0 \leq z \leq 2$ )

$$M_2 = -q \cdot z \cdot \frac{z}{2} + R_B \cdot z;$$

при  $z = 0$ ,  $M_2 = 0(\text{кНм})$ ,

при  $z = 2$ ,  $M_2 = 1(\text{кНм})$ .

Так как на 2-м участке поперечная сила обращается в нуль, необходимо найти экстремальное значение момента:

при  $x_0 = 1,03(\text{м})$   $M_2 = 8,01(\text{кНм})$ .

По вычисленным значениям  $Q$  и  $M$  строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (см. рисунок 3.13). По построенным эпюрам определяем наибольшие абсолютные значения внутренних сил  $Q_{\max} = 15,5(\text{кН})$ ,  $M_{\max} = 8,01(\text{кНм})$ .

Для балки рассмотренной в п. 3.10 (рисунок 3.13) необходимо произвести расчет на прочность и жесткость при плоском изгибе.

Наибольшее нормальное напряжение  $\sigma_{\max} \leq [\sigma] = 160 \text{МПа} = 160 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}$ , (материал – сталь).

Модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5 \text{МПа} = 2 \cdot 10^8 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}$ .

Анализируя эпюры  $Q$  и  $M$ , можно сделать вывод, что расчетными могут быть следующие сечения балки:

- $Q = 15,5 \text{кН}$ ,  $M = 0$ ;
- $Q = 0$ ,  $M = 8,01 \text{кНм}$ .

Так как решающим силовым фактором является  $M_{\max}$ , то проектировочный расчет на прочность будем проводить при  $M_{\max} = 8,01 \text{кНм}$  и  $Q = 0 \text{кН}$ .

1) Вычисление момента сопротивления.

Максимально допустимый момент сопротивления  $[W_z]$  равен:

$$[W_z] = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{8,01}{160 \cdot 10^3} = 0,0000500625(\text{м}^3),$$

где  $M_{\max} = 8,01 \text{кНм}$  – максимальный изгибающий момент.

2) Определение размеров проектируемых сечений.

Формулы для определения моментов сопротивления основных геометрических фигур приводятся в приложении Б.

- Для двутавра.

Согласно таблице сортамента примем двутавр № 12, для которого:

$$W_z^{(\kappa)} = 58,4(\text{см}^3) = 0,0000584(\text{м}^3),$$

$$F = 14,7(\text{см}^2) = 0,00147(\text{м}^2).$$

- Для сечения в виде прямоугольника.

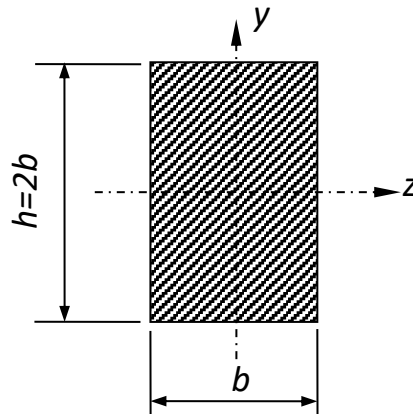


Рисунок 3.14

Момент сопротивления вычислим по формуле:

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = [W_z],$$

$$\frac{b \cdot (2b)^2}{6} = 0,0000500625 \Rightarrow b = 0,0422(\text{м}).$$

Конструктивно примем  $b = 0,043(\text{м})$ . При этом фактический момент сопротивления и площадь сечения будут равны:

$$W_z^{(\kappa)} = \frac{0,043 \cdot (2 \cdot 0,043)^2}{6} = 0,000053004(\text{м}^3),$$

$$F = 0,03 \cdot 0,09 = 0,00387(\text{м}^2).$$

- Для круга.

Момент сопротивления для круглого поперечного сечения вычислим по формуле:

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} = [W_z],$$

$$\frac{3,14 \cdot d^3}{32} = 0,0000500625 \Rightarrow d = 0,0799(\text{м}).$$

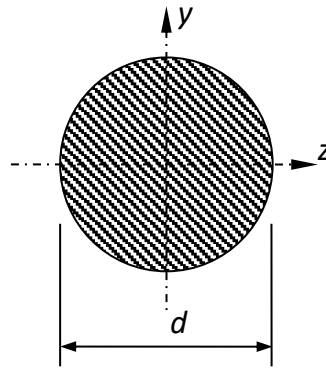


Рисунок 3.15

Примем  $d = 0,08(м)$ . При этом фактический момент сопротивления и площадь будут равны:

$$W_z^{(\kappa)} = \frac{3,14 \cdot 0,08^3}{32} = 0,00005024(м^3),$$

$$F = \frac{3,14 \cdot 0,08^2}{4} = 0,005024(м^2).$$

3) Оценка перегрузки или недогрузки балки производится по формуле:

$$\delta_\sigma = \frac{[W_z] - W_z^{(\kappa)}}{W_z^{(\kappa)}} 100\% .$$

- для двутавра

- $\delta_\sigma = \frac{[W_z] - W_z^{(\kappa)}}{W_z^{(\kappa)}} 100\% = \frac{0,0000500625 - 0,0000584}{0,0000584} 100\% \approx -14,3\%,$

недонапряжение составляет  $14,5\%(\leq 15\%)$ ;

- для прямоугольника

- $\delta_\sigma = \frac{[W_z] - W_z^{(\kappa)}}{W_z^{(\kappa)}} 100\% = \frac{0,0000500625 - 0,000053004}{0,000053004} 100\% \approx -5,5\%,$

недонапряжение составляет  $5,5\%(\leq 10\%)$ ;

- для круга

- $\delta_\sigma = \frac{[W_z] - W_z^{(\kappa)}}{W_z^{(\kappa)}} 100\% = \frac{0,0000500625 - 0,00005024}{0,00005024} 100\% \approx -0,35\%,$

недонапряжение составляет  $0,35\% (\leq 5\%)$ .

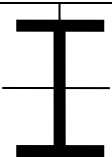
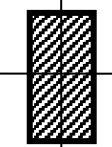
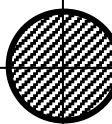
4) Расчет коэффициента материалоемкости балки производится с использованием следующего соотношения

$$K_{\sigma} = \frac{F}{F_{I}}$$

- для поперечного сечения в виде двутавра  $K_{\sigma} = 1$ ;
- для прямоугольного сечения  $K_{\sigma} = \frac{0,00387}{0,00147} = 2,633$ ;
- для круглого сечения  $K_{\sigma} = \frac{0,00502}{0,00147} = 3,415$ .

5) Результаты расчетов на прочность представим в табличной форме.

Таблица 9 - Основные результаты проектных расчетов на прочность

Эскиз сечения	$\delta_{\sigma},$ %	$F,$ $m^2$	$\frac{F}{F_{I}}$	Порядок рационального использования профиля по расходу материала
	-14,3	0,00147	1	1
	-5,5	0,00387	2,633	2
	-0,35	0,00502	3,415	3

Так как наиболее экономичным, то есть с наименьшим расходом стали, по сравнению с прямоугольным и круглым сечениями, является двутавр, все дальнейшие расчеты проводятся только для *двутаврового поперечного сечения*.

Определим максимальное значение нормального напряжения.

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z^{(\kappa)}} = \frac{8,01}{0,0000584} = 137157,5342 \left( \frac{\kappa H}{M^2} \right) \leq 160000 \left( \frac{\kappa H}{M^2} \right).$$

Эпюра нормальных напряжений для балки имеющей двутавровое поперечное сечение представлена на рисунке 3.16.

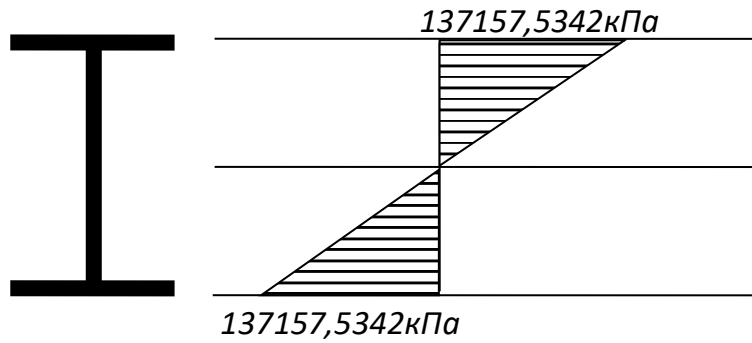


Рисунок 3.16